

Essa aula foi apresentada em 11/maio de 2011 ^{11/5} Aula 24

Aula nº 24

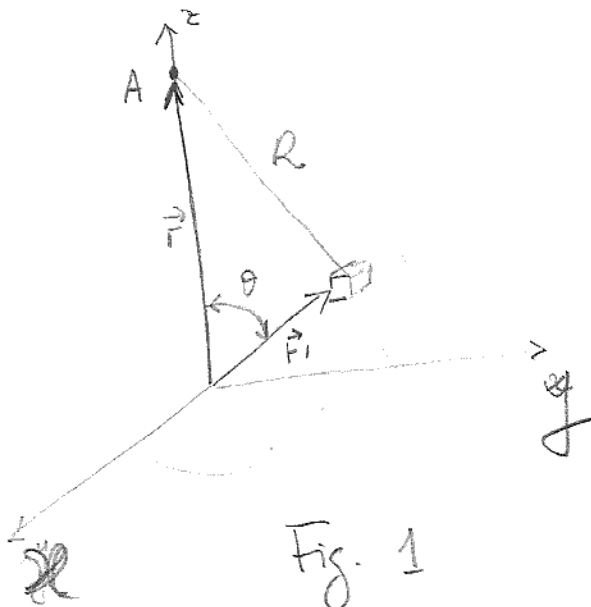
Colu3 Berkeley

1

Vol. 2 pág. 277

Cap. 3

Campos elétricos na matéria



$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

Fig. 1

Potencial aplicado no pto A p/ força densidade de carga $\rho(x', y', z')$

$$\phi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x', y', z')}{R} dv' \quad (1)$$

$$|\vec{R}| = |\vec{r} - \vec{r}'| = [(\vec{r} - \vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')]^{1/2}$$
$$= (r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}')^{1/2}$$

$$|\vec{R}| = (r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta)^{1/2} \quad (2)$$

Substituindo Eq. (1) na Eq. (2)

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \rho(\vec{r}') (r^2 + r'^2 + 2rr'\cos\theta)^{-1/2} \quad (3)$$

Podemos expandir a raiz quadrada da Eq. (3)

em potências de r'/r

$$[r^2 + r'^2 + 2rr'\cos\theta]^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{r} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{r'^2}{r^2} - 2\frac{r'}{r}\cos\theta\right)\right)^{1/2}} \quad (4)$$

Usando

$$(1 + \delta)^{-1/2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\delta + \frac{3}{8}\delta^2$$

Então

$$\left[r^2 + r'^2 - 2rr'\omega\theta \right]^{-1/2} =$$

$$= \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r} \omega\theta \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r} \omega\theta \right)^2 - \dots \right]$$

$$= \frac{1}{r} \left[1 + \frac{r'}{r} \omega\theta - \frac{1}{2} \frac{r'^2}{r^2} + \frac{3}{8} \cdot 4 \frac{r'^2}{r^2} \omega^2\theta + O\left(\frac{r'^3}{r^3}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{r} \left[1 + \frac{r'}{r} \omega\theta - \frac{1}{2} \frac{r'^2}{r^2} + \frac{3}{2} \omega^2\theta \frac{r'^2}{r^2} + O\left(\frac{r'^3}{r^3}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{r} \left[1 + \frac{r'}{r} \omega\theta + \frac{1}{2} \frac{r'^2}{r^2} (3\omega^2\theta - 1) \right] \quad (5)$$

Substituindo resultado obtido na Eq. (5)

na Eq (3), então

$$\begin{aligned} \varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int \rho(\vec{r}') d\tau' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int r' \cos\theta \rho(\vec{r}') d\tau' \\ + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \int r'^2 \left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{2} \right) \rho(\vec{r}') d\tau' \end{aligned} \quad (5)$$

Podemos identificar

$$K_0 \equiv \int \rho(\vec{r}') d\tau' \quad (6)$$

$$K_1 \equiv \int r' \cos\theta \rho(\vec{r}') d\tau' \quad (7)$$

$$K_2 \equiv \int r'^2 \left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{2} \right) \rho(\vec{r}') d\tau' \quad (8)$$

Logo

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{K_0}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{K_1}{r^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{K_2}{r^3} + \dots \quad (9)$$

K_0 = carga total da distribuição

$K_0 = 0$ se houver igual quantidade de carga positiva e negativa. Caso contrário será o termo dominante da expansão p/ distâncias grandes.

Suponha $K_0 = 0$, vamos examinar

$$K_1 = \int r' \cos \theta \rho \, d\tau' \quad (10)$$

Como $r' \cos \theta = z'$ mede o deslocamento relativo (na direção e sentido de A) carga negativa. Tem valor não nulo p/ densidades de carga onde há uma separação de carga negativa e positiva.

K_0 = momento de monopolo

K_1 = " " dipolo

K_2 = " " quadrupolo.

Vamos ^{olhar} para o potencial associado ao

momento dipolar

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int \hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}' \rho \, dv' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \cdot \int \vec{r}' \rho \, dv' \quad (11)$$

Vamos definir o vetor momento dipolar $\vec{p}$

$$\vec{p} \equiv \int \vec{r}' \rho \, dv' \quad (12)$$

Então

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{p}}{r^2} \quad (13)$$

Para entender como e^r o campo
elétrico (ver Fig 9.5, ver Berkeley)

$$y = \frac{\rho z}{(x^2 + z^2)^{3/2}} \quad (14)$$

já que $\cos \theta = \frac{z}{(x^2 + z^2)^{1/2}} \quad (15)$

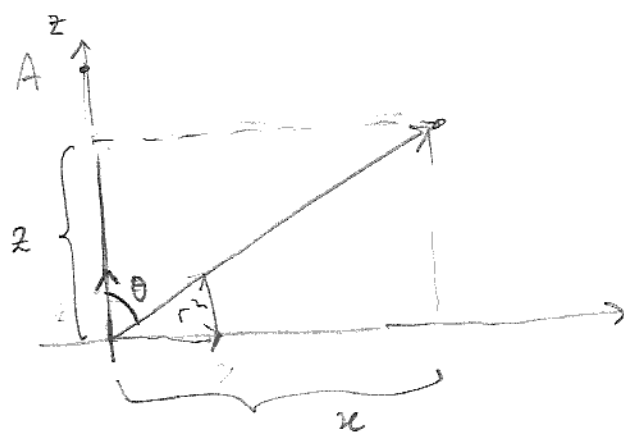


Fig 2

$$\sin \theta = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \quad (16)$$

$$\cos^2 \theta = \frac{z^2}{x^2 + z^2} \quad (17)$$

As componentes de campos elétricos

$$E_x = - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = + \frac{3}{2} p z (x^2 + z^2)^{-5/2} \cdot \cancel{2x} = \frac{3 p z x}{(x^2 + z^2)^{5/2}} \quad (16)$$

$$E_z = - \frac{\partial \varphi}{\partial z} =$$

$$= - \frac{p}{(x^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{3}{2} p z (x^2 + z^2)^{-5/2} \cdot \cancel{2z}$$

$$= p \left[\frac{3z^2}{(x^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2 + z^2)^{3/2}} \right]$$

$$= p \left[\frac{3}{(x^2 + z^2)^{3/2}} \overbrace{\frac{z^2}{x^2 + z^2}}^{\cos^2 \theta} - \frac{1}{(x^2 + z^2)^{3/2}} \right]$$

$$E_x = 3p \left(\frac{z}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \right) \left(\frac{x}{(z^2 + y^2)^{1/2}} \right) \left(\frac{1}{(x^2 + z^2)^{3/2}} \right) = \frac{1}{r^3}$$

$$E_x = 3p \frac{\cos \theta \sin \theta}{r^3} \quad (18)$$

$$E_z = p \left[\frac{3 \cos^2 \theta - 1}{r^3} \right] \quad (19)$$

Discontinua figuras 9.5 e 9.6

verificar Berkeley pag.

Dipolos atômicos e moleculares: momentos de dipolo induzidos

$$\vec{p} = \alpha \vec{E} \quad (20)$$

momento de dipolo induzido pelo campo elétrico $\vec{E}$. A quantidade α na Eq. (20) é uma propriedade do átomo chamada polarizabilidade atômica

				unidade
	H	He	Li	10^{-24} cm^3
$\alpha =$	0,66	0,21	12	34

Moléculas também desenvolvem momento de dipolo induzido pela aplicação de um campo elétrico. Ex metano (ver fig. 9.13, Cole & Berkeley)

vol 2, pag. 290)

$$\alpha = 2,6 \cdot 10^{-24} \text{ cm}$$

Tensor de polarizabilidade

Existe no caso de moléculas a possibilidade de um momento de dipolo induzido não paralelo ao campo elétrico aplicado. Isto significa que a polarizabilidade pode não ser simplesmente descrita como um escalar, mas sim como um tensor

$$p_x = \alpha_{xx} E_x + \alpha_{xy} E_y + \alpha_{xz} E_z \quad (21. a)$$

$$p_y = \alpha_{yx} E_x + \alpha_{yy} E_y + \alpha_{yz} E_z \quad (21. b)$$

$$p_z = \alpha_{zx} E_x + \alpha_{zy} E_y + \alpha_{zz} E_z \quad (21. c)$$